Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

2022 - 2023

Αντώνης Βαλέργας
Αποστόλης Κακαβάς
Στέλιος Μιχαήλογλου
Άγγελος Μπλιάς
Δημήτρης Πατσιμάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Νίκος Σαμπάνης
Βαγγέλης Τόλης
Νίκος Τούντας
Ισαάκ Χιονίδης

7ο Γενικό επαναληπτικό διαγώνισμα

29-4-2023

Θέμα Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o\in A$ τοπικό ελάχιστο;

μονάδες 4

Α3. Σε μία σχολική τάξη ένας καθηγητής θέτει στους μαθητές του την εξής ερώτηση:

«Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι πάντοτε απροσδιόριστη μορφή $\left(\dfrac{0}{0}\right)$; »

Τότε ένας μαθητής απάντησε λέγοντας ότι:

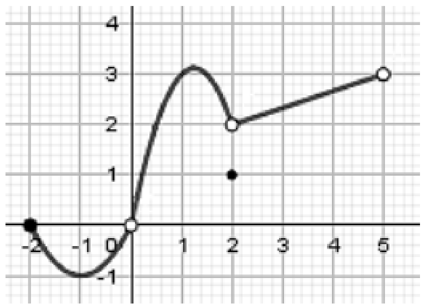
«Η f είναι συνεχής στο x_0 άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ και αφού $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=0$, τότε πάντα έχουμε απροσδιοριστία $\left(\dfrac{0}{0}\right)$».

α) Συμφωνείτε με την απάντηση του μαθητή;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

μονάδες 1+3

Α4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή** ή **Λάθος**.



α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $[-2,0)\cup(0,2)\cup(2,5)$.

β) Η f έχει τρία σημεία ασυνέχειας.

γ) Υπάρχει διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq[1,2]$ στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.

δ) Για την f' υπάρχει διάστημα στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.

ε) Ισχύει ότι $\int_3^4 f(x)dx<3$.

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\sqrt{6-x}$ και $f:[-3,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν ;

- f συνεχής στο πεδίο ορισμού της ,
- $f(-2)=2$ και
- $f^2(x)-2f(x)=x+2$ για κάθε $x>-3$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x+3}+1$ (5 μονάδες)

Β2. α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x)=x^2-2x-2, x\ge 1$.

β) Να ορίσετε και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)=\left(f^{-1}\circ g\right)(x)$.

(6 μονάδες)

Αν $\varphi(x)=4-x-2\sqrt{6-x}$, $x\le 5$

Β3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)+2\sqrt{6}+x-4+\eta\mu x}{x}$. (4 μονάδες)

B4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $-x^2+6x-8-2\sqrt{6-x}\cdot(x-2)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-3,2)$.

(6 μονάδες)

B5. Αν $h(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x+3}}}{f(x)-1}$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=-2$, $x=1$.

(4 μονάδες)

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x+x^2\cdot\ln x & ,x>0\\ \beta & ,x=0\\ x^2\cdot\ln(-x) & ,x<0\end{cases}$

Γ1. Να βρείτε τα α και β αν γνωρίζετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(6 μονάδες)

Στα επόμενα να θεωρήσετε ότι α=0 κα β= 0.

Γ2. Αν $g(x)=f(x),\ \ x\geq 0$, να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία, ακρότατα και τη κυρτότητα.

(6 μονάδες)

Γ3. Να δειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\ln\left(\dfrac{1}{x^2+\sqrt{e}+1}\right)>-\dfrac{\left(x^2+\sqrt{e}+1\right)^2}{2e}$

(5 μονάδες)

Γ4. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της g με $x\geq 1$. Αν τη χρονική στιγμή t=0 το κινητό βρίσκεται στο σημείο A(1,0) και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι $x'(t)=\dfrac{1}{e^2}$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ ,αν Β η προβολή του σημείου Μ στον άξονα x΄x τη χρονική στιγμή t_0, όπου $x(t_0)=e$

(8 μονάδες)

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha e^x+\beta x-1,\ \ x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)\geq 2\alpha+\beta\ln 2-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $2\int_0^1 f(x)dx=e-4$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1}{2}$ και $\beta=-1$.

(4 μονάδες)

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες x_1, x_2 με $-1<x_1<0$ και $1<x_2<2$.

(8 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$, ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}-\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{x_1-x_2}{\ln 2}$.

(5 μονάδες)

Δ4. Αν E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από x΄x και τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα x_1, x_2 και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από x΄x και την γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=-\dfrac{x_1\cdot x_2}{x_1+x_2}$

(8 μονάδες)

Ευχόμαστε επιτυχία!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν
$F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

Α2. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Α3. α) Ο μαθητής κάνει λάθος.
β) Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x)=c$, $x\in\mathbb{R}$ με $c\in\mathbb{R}$ τότε είναι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0$$ οπότε δεν έχουμε απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Α4. α) Λάθος β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Σωστό.

Θέμα Β

Β1. Είναι $f^2(x)-2f(x)=x+2\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=x+3\Leftrightarrow(f(x)-1)^2=x+3$ (1).
Θέτουμε $\varphi(x)=f(x)-1$, η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών για κάθε $x\ge-3$ άρα
$(1)\Leftrightarrow\varphi^2(x)=x+3\Leftrightarrow\sqrt{\varphi^2(x)}=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow|\varphi(x)|=\sqrt{x+3}$.
Είναι $\varphi(x)=0\Leftrightarrow\varphi^2(x)=0\Leftrightarrow x+3=0\Leftrightarrow x=-3$.
Για κάθε x >-3 η φ είναι συνεχής , $\varphi(x)\ne0$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή
$\varphi(-2)=f(-2)-1=1>0$ είναι $\varphi(x)>0$ για κάθε x > - 3, άρα $\varphi(x)=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow$
$f(x)=\sqrt{x+3}+1$, $x>-3$. Η f είναι συνεχής στο -3 οπότε $f(-3)=\lim\limits_{x\to-3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}\left(\sqrt{x+3}+1\right)=1$
οπότε $f(x)=\sqrt{x+3}+1$, $x\ge-3$.

Β2. α) Για κάθε x_1, $x_2\ge-3$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\sqrt{x_1+3}+1=\sqrt{x_2+3}+1\Leftrightarrow\sqrt{x_1+3}=\sqrt{x_2+3}\Leftrightarrow$
$x_1+3=x_2+3\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα η f είναι 1-1 επομένως ορίζεται η αντίστροφη της f.
Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}+1=y\\ y\ge1\\ x\ge-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=(y-1)^2\\ y\ge1\\ x\ge-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y^2-2y-2\\ y\ge1\\ x\ge-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y^2-2y-2\\ y\ge1\\ y^2-2y-2\ge-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y^2-2y-2\\ y\ge1\\ (y-1)^2\ge0,\text{αληθής }\forall y\ge1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}f^{-1}(y)=y^2-2y-2\\ y\ge1\end{cases}$$. Άρα $f^{-1}(x)=x^2-2x-2$, $x\ge1$,

β) Είναι $D_{f^{-1}\circ g}:\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_{f^{-1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le6\\ g(x)\ge1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le6\\ \sqrt{6-x}\ge1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le6\\ 6-x\ge1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le6\\ x\le5\end{cases}$. Άρα $D_{f^{-1}\circ g}=(-\infty,5]$ και

$$\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=g^2(x)-2g(x)-2=6-x-2\sqrt{6-x}-2=4-x-2\sqrt{6-x}$$

Β3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)+2\sqrt{6}+x-4+\etaμx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4-x-2\sqrt{6-x}+2\sqrt{6}+x-4+\etaμx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sqrt{6}-2\sqrt{6-x}+\etaμx}{x}=$

$\lim\limits_{x\to0}\left(2\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{6-x}}{x}+\dfrac{\etaμx}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(2\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{6-x}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{6-x}}{\sqrt{6}+\sqrt{6-x}}+\dfrac{\etaμx}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x}{\sqrt{6-x}+\sqrt{6}}+\dfrac{\etaμx}{x}\right)=$

$\dfrac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{6}}+1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}+1=\dfrac{\sqrt{6}+6}{6}$.

Β4. Είναι $-x^2+6x-8-2\sqrt{6-x}\cdot(x-2)=0\Leftrightarrow-(x-2)(x-4)-2\sqrt{6-x}\cdot(x-2)=0\Leftrightarrow$

$(x-2)\left(-x+4-2\sqrt{6-x}\right)=0\Leftrightarrow(x-2)\varphi(x)=0\overset{x\in(-3,2)}{\Leftrightarrow}\varphi(x)=0$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-3,2)$.

Η φ είναι συνεχής στο [-3 , 2] ,φ(-3)= 1>0, φ(2)= -2 <0 , άρα $\varphi(-3)\varphi(2)<0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-3,2)$.

Β5. Η $h(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x+3}}}{f(x)-1}$ είναι συνεχής για κάθε $x>-3$ και $h(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}>0$ για κάθε $x>-3$.

$E=\displaystyle\int_{-2}^{1}\left|\frac{e^{\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}\right|dx=2\int_{-2}^{1}\frac{e^{\sqrt{x+3}}}{2\sqrt{x+3}}dx$ (1) .

x	-2	1
u	1	2

Θέτουμε $\sqrt{x+3}=u$, οπότε $du=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}dx$,

Η (1) γίνεται $E=\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{e^{\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}dx=\int_{1}^{2}2e^{u}du=\left[2e^{u}\right]_1^2=2e^2-2e=2e(e-1)$.

ή

$E=\displaystyle\int_{-2}^{1}\left|\frac{e^{\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}\right|dx=2\int_{-2}^{1}\frac{e^{\sqrt{x+3}}}{2\sqrt{x+3}}dx=\left[2e^{\sqrt{x+3}}\right]_{-2}^{1}=2e^2-2e=2e(e-1)$.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, άρα και συνεχής στο 0, οπότε

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ (1).

Όμως $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\alpha x+x^2\ln x)=0$ αφού

$\lim\limits_{x\to0^+}(x^2\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-2}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$,

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(-x)}{x^{-2}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}=0$.

Από τη σχέση (1) $\Rightarrow f(0)=0\Leftrightarrow\beta=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (2).

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha x+x^2\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\alpha+x\ln x\right)=\alpha+0=\alpha$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-1}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2\ln(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\ln(-x)\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(-x)}{x^{-1}}\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=0$. Άρα

$(2)\Rightarrow\alpha=0$.

Γ2. Είναι $g(x)=\begin{cases}x^2\cdot\ln x & ,x>0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$g'(x)=\left(x^2\cdot\ln x\right)'=2x\ln x+x=x\left(2\ln x+1\right)$.

Είναι $g'(x)\ge 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2\ln x\ge -1\Leftrightarrow x\ge e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		↘	↗

Η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο

$\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$. Η g έχει ελάχιστο το $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=\dfrac{1}{e}\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2e}$.

Για κάθε x>0 η g' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$g''(x)=\left(2x\cdot\ln x+x\right)'=2\ln x+2+1=2\ln x+3$

$g'(x)\ge 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2\ln x\ge -3\Leftrightarrow x\ge e^{-\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{e\sqrt{e}}$

x	0	$\frac{1}{e\sqrt{e}}$	$+\infty$
$g''(x)$		-	+
$g(x)$		∩	∪

Η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε είναι κοίλη στο

$\left[0,\dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right]$ και κυρτή στο $\left[\dfrac{1}{e\sqrt{e}},+\infty\right)$.

Γ3. $\ln\left(\dfrac{1}{x^2+\sqrt{e}+1}\right)>-\dfrac{\left(x^2+\sqrt{e}+1\right)^2}{2e}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\left(x^2+\sqrt{e}+1\right)^2}\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x^2+\sqrt{e}+1}\right)>-\dfrac{1}{2e}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{x^2+\sqrt{e}+1}\right)^2\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x^2+\sqrt{e}+1}\right)>-\dfrac{1}{2e}\Leftrightarrow g\left(\dfrac{1}{x^2+\sqrt{e}+1}\right)>g\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $\dfrac{1}{x^2+\sqrt{e}+1}$, $\dfrac{1}{\sqrt{e}}\in\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ όπου η g είναι γνησίως φθίνουσα , άρα

$g\left(\dfrac{1}{x^2+\sqrt{e}+1}\right)>g\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^2+\sqrt{e}+1}<\dfrac{1}{\sqrt{e}}\Leftrightarrow x^2+\sqrt{e}+1>\sqrt{e}\Leftrightarrow x^2+1>0\Leftrightarrow$ αληθής $\forall x\in\mathbb{R}$

2ος τρόπος

Για $x\in\mathbb{R}$ θέτουμε $u=x^2+\sqrt{e}+1>0$ οπότε η ανίσωση

$\ln\left(\dfrac{1}{x^2+\sqrt{e}+1}\right)>-\dfrac{\left(x^2+\sqrt{e}+1\right)^2}{2e}\Leftrightarrow-\ln\left(x^2+\sqrt{e}+1\right)>-\dfrac{\left(x^2+\sqrt{e}+1\right)^2}{2e}\Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2+\sqrt{e}+1\right)<\dfrac{\left(x^2+\sqrt{e}+1\right)^2}{2e}$ μετατρέπεται στην ισοδύναμη της $\ln u<-\dfrac{u^2}{2e}\Leftrightarrow\dfrac{\ln u}{u^2}<-\dfrac{1}{2e},u>0$ (A).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $m(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

Η m είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $m'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

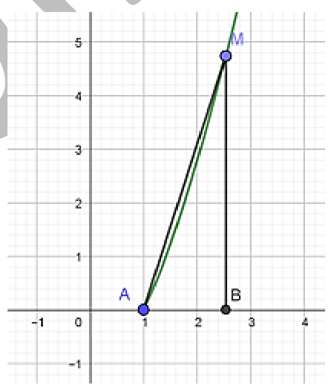
Είναι $m'(x)\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-2\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<x\leq\sqrt{e}$.

Η m είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\sqrt{e}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$. Η m έχει μέγιστο το $m\left(\sqrt{e}\right)=\frac{\ln e^{-\frac{1}{2}}}{e}=-\frac{1}{2e}$.

Επομένως $m(x)\leq m\left(\sqrt{e}\right)$ με το << ίσον>> να ισχύει μόνο για $x=\sqrt{e}$.

Από τη σχέση (A) έχουμε $m(u)<-\frac{1}{2e} \Leftrightarrow u\neq\sqrt{e}$.

Για $u=\sqrt{e}$ είναι $\cancel{\sqrt{e}}=x^2+\cancel{\sqrt{e}}+1 \Leftrightarrow x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$, η οποία δεν έχει πραγματικές λύσεις άρα η ζητούμενη ανίσωση ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς.



Γ4. $E(t)=\frac{(AB)\cdot(MB)}{2}=\frac{\left(x(t)-1\right)g(x(t))}{2}=\frac{\left(x(t)-1\right)x^2(t)\ln(x(t))}{2}=$
$\frac{\left(x^3(t)-x^2(t)\right)\ln(x(t))}{2}$.

Είναι για $t\geq 0$, $x(t)\geq 1$

$$E'(t)=\frac{\left(3x^2(t)x'(t)-2x(t)x'(t)\right)\ln(x(t))+\left(x^3(t)-x^2(t)\right)\frac{1}{x(t)}x'(t)}{2}=$$

$$=\frac{\left(3x(t)-2\right)x(t)x'(t)\ln(x(t))+\left(x^2(t)-x(t)\right)x'(t)}{2}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$E'(t_0)=\frac{(3e-2)e\frac{1}{e^2}\ln e+\left(e^2-e\right)\frac{1}{e^2}}{2}=\frac{\frac{3e-2}{e}\ln e+\frac{e^2-e}{e^2}}{2}=\frac{\frac{3e-2}{e}+\frac{e-1}{e}}{2}=\frac{4e-3}{2e}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\alpha e^x+\beta$.

$f(\ln 2)=\alpha e^{\ln 2}+\beta\ln 2-1=2\alpha+\beta\ln 2-1$, άρα $f(x)\geq 2\alpha+\beta\ln 2-1 \Leftrightarrow f(x)\geq f(\ln 2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f έχει ελάχιστο στο $x_0=\ln 2$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 οπότε για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat , άρα $f'(\ln 2)=0 \Leftrightarrow \alpha e^{\ln 2}+\beta=0 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-2\alpha$ (1)

Είναι $2\int_0^1 f(x)dx=e-4 \Leftrightarrow 2\int_0^1\left(\alpha e^x+\beta x-1\right)dx=e-4 \Leftrightarrow 2\int_0^1\left(\alpha e^x-2\alpha x-1\right)dx=e-4 \Leftrightarrow$

$2\alpha\left[e^x\right]_0^1-4\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-2\left[x\right]_0^1=e-4 \Leftrightarrow 2\alpha(e-1)-2\alpha-2=e-4 \Leftrightarrow 2\alpha e-2\alpha-2\alpha-2-e+4=0 \Leftrightarrow$

$2\alpha e-4\alpha-e+2=0 \Leftrightarrow (e-2)\cdot(2\alpha-1)=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$ Από τη σχέση (1) για $\alpha=\frac{1}{2}$ έχουμε $\beta=-1$.

Δ2. Είναι $f(x)=\frac{1}{2}e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{2}e^x-1$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Είναι $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 2 \Leftrightarrow x \ge \ln 2$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(\ln 2) = \frac{1}{2}e^{\ln 2} - \ln 2 - 1 = \frac{1}{2}2 - \ln 2 - 1 = -\ln 2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^x - x - 1\right) = 0 + \infty - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^x - x - 1\right) = +\infty - 1 = +\infty$ διότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^x - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty\left(\frac{1}{2} - 0\right) = +\infty$, επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$

Έστω $A_1 = (-\infty, \ln 2]$ και $A_2 = (\ln 2, +\infty)$.Είναι

$f(A_1) \overset{f\searrow}{=} [-\ln 2, +\infty)$ και $f(A_1) \overset{f\nearrow}{=} (-\ln 2, +\infty)$, άρα $f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-\ln 2, +\infty)$.

Το $0 \in f(A_1)$ και f γνησίως φθίνουσα στο A_1, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $x_1 \in A_1$

Το $0 \in f(A_2)$ και f γνησίως αύξουσα στο A_2, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $x_2 \in A_2$

Επομένως $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Όμως $f(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$, $f(-1) = \frac{1}{2}e^{-1} + 1 - 1 = \frac{1}{2e} > 0$,

$f(1) = \frac{1}{2}e - 1 - 1 = \frac{1}{2}e - 2 = \frac{e-4}{2} < 0$ και $f(2) = \frac{1}{2}e^2 - 2 - 1 = \frac{1}{2}e^2 - 3 = \frac{e^2 - 6}{2} > 0$.

Άρα $f(0) < f(x_1) < f(-1) \overset{f\searrow A_1}{\Leftrightarrow} -1 < x_1 < 0$ και $f(1) < f(x_2) < f(2) \overset{f\nearrow A_2}{\Leftrightarrow} 1 < x_2 < 2$

2ος τρόπος

Όμως $f(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$, $f(-1) = \frac{1}{2}e^{-1} + 1 - 1 = \frac{1}{2e} > 0$,

$f(1) = \frac{1}{2}e - 1 - 1 = \frac{1}{2}e - 2 = \frac{e-4}{2} < 0$ και $f(2) = \frac{1}{2}e^2 - 2 - 1 = \frac{1}{2}e^2 - 3 = \frac{e^2 - 6}{2} > 0$.

Η f συνεχής στα διαστήματα $[-1,0],[1,2]$, $f(-1)\cdot f(0) < 0$, $f(1)\cdot f(2) < 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0),(1,2)$.Όμως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

Άρα $-1 < x_1 < 0$ και $1 < x_2 < 2$.

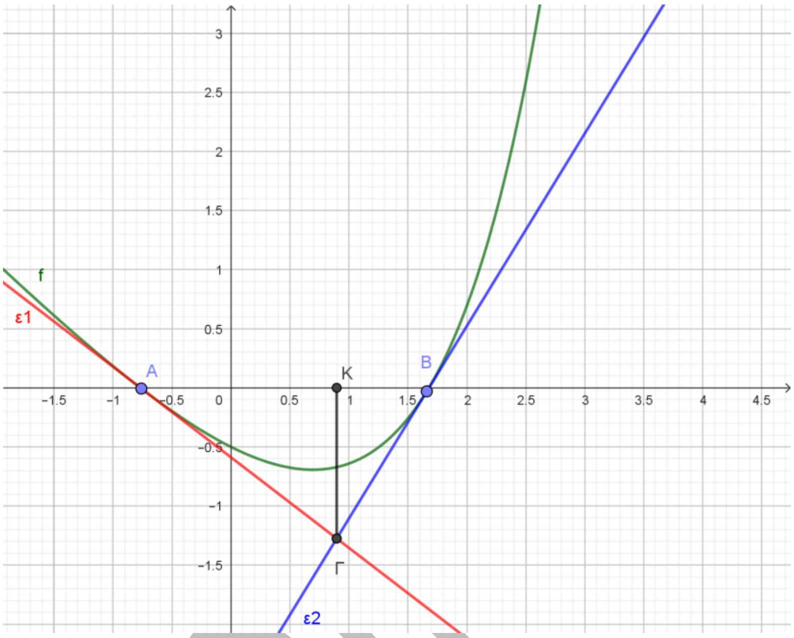
Δ3. Στο $[x_1, \ln 2]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ , άρα υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, \ln 2)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\ln 2) - f(x_1)}{\ln 2 - x_1} = \frac{-\ln 2 - 0}{\ln 2 - x_1} = \frac{-\ln 2}{\ln 2 - x_1} = \frac{\ln 2}{x_1 - \ln 2}$$

Στο $[\ln 2, x_2]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ , άρα υπάρχει $\xi_2 \in (\ln 2, x_2)$:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(\ln 2)}{x_2 - \ln 2} = \frac{0 + \ln 2}{x_2 - \ln 2} = \frac{\ln 2}{x_2 - \ln 2}$$

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{x_1 - \ln 2}{\ln 2} - \frac{x_2 - \ln 2}{\ln 2} = \frac{x_1 - \ln 2 - x_2 + \ln 2}{\ln 2} = \frac{x_1 - x_2}{\ln 2}.$$



Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_1,0)$ είναι

$\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$.

Όμως $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{x_1} - x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}e^{x_1} = x_1 + 1 \,(1)$ οπότε $f'(x_1) = \frac{1}{2}e^{x_1} - 1 \overset{(1)}{=} x_1$

Άρα $\varepsilon_1 : y = x_1(x - x_1) \Leftrightarrow y = x_1 x - x_1^2$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(x_2,0)$ είναι

$\varepsilon_2 : y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$.

Όμως $f(x_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{x_2} - x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}e^{x_2} = x_2 + 1 \,(2)$ οπότε $f'(x_2) = \frac{1}{2}e^{x_2} - 1 \overset{(2)}{=} x_2$

Άρα $\varepsilon_2 : y = x_2(x - x_2) \Leftrightarrow y = x_2 x - x_2^2$

Λύνω το σύστημα των δύο ευθειών για να βρω το κοινό τους σημείο Γ

$\begin{cases} y = x_1 x - x_1^2 \\ y = x_2 x - x_2^2 \end{cases}$ οπότε $x_1 x - x_1^2 = x_2 x - x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)x = x_1^2 - x_2^2 \Leftrightarrow x = x_1 + x_2$ γιατί $x_1 - x_2 \neq 0$ και

$y = x_1(x_1 + x_2) - x_1^2 = x_1 x_2$.

$$E_1 = (AB\Gamma) = \frac{AB \cdot \Gamma K}{2} = \frac{(x_2 - x_1)\cdot(-x_1 x_2)}{2} = \frac{(x_1 - x_2)\cdot x_1 x_2}{2}.$$

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, x_1, x_2 διαδοχικές ρίζες , $f(0) < 0$ οπότε $f(x) \le 0$ στο διάστημα αυτό.

Επομένως $E_2 = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = -\int_{x_1}^{x_2} (\frac{1}{2}e^x - x - 1) dx = = -\left[\frac{1}{2}e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_{x_1}^{x_2} =$

$$-\left(\frac{1}{2}e^{x_2} - \frac{1}{2}e^{x_1} - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} - x_2 + x_1\right) \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} -\left(x_2 + 1 - x_1 - 1 - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} - x_2 + x_1\right) = -\left(-\frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}\right) = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} =$$

$$\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2}.$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{(x_1 - x_2)x_1 \cdot x_2}{2}}{\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2}} = \frac{-x_1 \cdot x_2}{x_2 + x_1} = -\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}.$$